

財團法人大學入學考試中心基金會

115學年度學科能力測驗試題

數學A考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{18-1}{18-2}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 18-2 列的 $\frac{8}{8}$ 劃記，如：

18-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{-}{8}$	$\frac{\pm}{8}$
18-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{-}{8}$	$\frac{\pm}{8}$

例：若答案格式是 $\frac{19-1}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 $\frac{-7}{50}$ 與第 19-2 列的 $\frac{7}{50}$ 劃記，如：

19-1	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	$\frac{-}{50}$	$\frac{\pm}{50}$
19-2	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	$\frac{-}{50}$	$\frac{\pm}{50}$

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

- 財神廟舉辦抽發財金活動：參加者抽兩次籤，每次抽籤出現「吉」、「祥」的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。
如果兩次都抽得「吉」，獲得獎金 180 元；如果兩次都抽得「祥」，獲得獎金 90 元；其餘情況則無獎金。試問參加者可獲獎金的期望值為何？
(1) 20 元 (2) 30 元 (3) 45 元 (4) 60 元 (5) 90 元
- 對任一實數 a ，令 $[a]$ 代表滿足 $[a] \leq a < [a] + 1$ 的整數，例如： $[3] = 3$ ， $[3.1] = 3$ ， $[-3.1] = -4$ 。
關於函數 $f(x) = [\sqrt{99-x}] + [\sqrt{99+x}]$ ，其中 $-99 \leq x \leq 99$ ；試選出正確的選項。
(1) $f(-20) \leq f(0) < f(1)$
(2) $f(-20) < f(1) \leq f(0)$
(3) $f(1) < f(-20) \leq f(0)$
(4) $f(0) < f(-20) \leq f(1)$
(5) $f(0) \leq f(1) < f(-20)$
- 設 $f(x) = a^x$ ，其中 a 為正實數。已知 c_1, c_2, c_3 是公差為 $\frac{10}{3}$ 的等差數列，且 $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ 是公比為 4 的等比數列。則等比數列 $f(10), f(8), f(6)$ 的公比為何？
(1) $2^{\frac{-6}{5}}$ (2) $2^{\frac{-3}{5}}$ (3) $2^{\frac{3}{5}}$ (4) $2^{\frac{6}{5}}$ (5) $2^{\frac{5}{3}}$
- 某網遊有 16 種材料，其中 6 種為基本材料，10 種為進階材料。任選 3 種不同材料可以合成出草藥、食物、藥水中的 1 類道具，其合成規則如下：若 3 種材料均為基本材料，則合成結果必為同一種草藥；若 3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料，則合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，但不會受到基本材料不同而改變；其他的組合都會合成出不同種的藥水。試問此網遊總共可合成出多少種道具？
(1) 256 (2) 370 (3) 401 (4) 455 (5) 560

5. 已知實數三階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。試問有多少個行向量

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ 滿足 } A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 且 } \vec{v} \text{ 垂直於行向量 } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 0 個 (5) 無窮多個

6. 坐標平面上有 $A(2,-2), B(-1,2)$ 兩點，試問直線 $y=-6$ 上有多少個點 C 使得 $\triangle ABC$ 為等腰三角形？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 坐標平面上同時滿足 $\begin{cases} 2x-y-3>0 \\ x+2y+1<0 \end{cases}$ 的點 $P(x,y)$ 可能位在下列哪些選項？

- (1) 第一象限
(2) 第二象限
(3) 第三象限
(4) 第四象限
(5) x 軸

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，且對所有正整數 $n \geq 2$ ，令 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 。試選出正確的選項。

- (1) $b_2 < c_2$
(2) $A^2 = 2A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(3) $c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$
(4) $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$
(5) $d_{2n} - a_{2n} = (d_n)^2 - (a_n)^2$

9. T 分數為評量成績的一種方式，其計算方式如下：設全班平均成績為 μ 且標準差為 σ 。若某生原始成績為 S ，則他該科之 T 分數為 $T = 50 + 10\left(\frac{S - \mu}{\sigma}\right)$ 。已知某班期末數學和英文兩科的平均成績皆為 60，數學成績的標準差為 12，英文成績的標準差為 8。試選出正確的選項。
- (1) 若甲生英文的原始成績為 52，則其 T 分數為 40
 - (2) 各生數學的 T 分數不會超過其原始成績
 - (3) 若乙生兩科的原始成績平均比丙生兩科的原始成績平均高，則乙生兩科的 T 分數平均比丙生兩科的 T 分數平均高
 - (4) 若該班級兩科的及格標準均為 T 分數大於或等於 40，則數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低
 - (5) 該班原始成績數學對英文的迴歸直線（即最適直線）之斜率與該班 T 分數數學對英文的迴歸直線之斜率相同
10. 已知四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AB} 平行 \overline{DC} ， \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 E 。若 $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 5)$ 且 $\triangle ABE$ 面積為 3。試選出正確的選項。
- (1) $\cos \angle BAD = \frac{-7\sqrt{65}}{65}$
 - (2) $\triangle ABD$ 面積為 9
 - (3) $\overrightarrow{AE} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
 - (4) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\frac{65}{3}$
 - (5) $\overline{BC} < \frac{8}{3}$

11. 令 Γ 為坐標平面上 $y = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ 的圖形。對任一實數 $m \neq 0$ ，以 L_m 表示直線 $y = mx + 1$ 。

試選出正確的選項。

- (1) $m > 0$ 時， L_m 和 Γ 交點的 x 坐標皆為負
- (2) 若 (a, b) 為 L_m 和 Γ 的交點，則 $(-a, b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點
- (3) 可以找到一實數 $m \neq 0$ 使得 L_m 和 Γ 交於點 $(\frac{20}{3}, \frac{1}{2})$
- (4) 若 L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y = -1$ 上，則 $\frac{1}{m}$ 是奇數
- (5) 若 L_m 與 Γ 有一交點在 x 軸上，則 L_m 與 Γ 有偶數個交點

12. 令 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為實係數三次多項式且 $f(x)$ 的首項係數為 1，已知 $f(x) - g(x) = 2x^3 + 2x$ 。

令 Γ_1 和 Γ_2 分別為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在坐標平面上的函數圖形，其對稱中心分別為 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ 。

試選出正確的選項。

- (1) Γ_1 和 Γ_2 恰交於三點
- (2) $a_1 + a_2$ 可唯一確定
- (3) $b_1 + b_2$ 可唯一確定
- (4) 若 $a_1 = a_2$ ，則 $b_1 = b_2$
- (5) 若 $b_1 = b_2$ ，則 $a_1 = a_2$

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 某高中聘用的全體教師 $\frac{1}{4}$ 只有學士學位， $\frac{3}{4}$ 有碩士學位。只有學士學位的教師中有 $\frac{1}{5}$ 通過英聽檢定，有碩士學位的教師中有 $\frac{3}{5}$ 通過英聽檢定。已知每位教師被抽到的機會相等，若隨機抽選一位通過英聽檢定的教師，則該教師有碩士學位的條件機率為

$$\frac{\textcircled{13-1}}{\textcircled{13-2} + \textcircled{13-3}} \text{。 (化為最簡分數)}$$

14. 坐標平面上，向量 (a, b) 與直線 $y = bx - 1$ 垂直，則 $a + b$ 的最大可能值為 $\frac{\textcircled{14-1}}{\textcircled{14-2}}$ 。
(化為最簡分數)

15. 已知三正數 a, b, c 成一等差數列，其中 $a < b < c$ ，且坐標平面上三點 $(a, \log 3a)$ 、 $(b, \log 4b)$ 、

$(c, \log 6c)$ 在同一直線上，則 $\frac{b}{a}$ 之值為 $\frac{\textcircled{15-1}}{\textcircled{15-2}}$ 。(化為最簡分數)

16. 坐標平面上，已知二次函數圖形 $\Gamma: y = f(x)$ 的頂點 P 在直線 $y = 1 + 2x$ 上，且交 x 軸於點 $A(-\frac{1}{2}, 0), B(\frac{1}{2}, 0)$ 。將 Γ 平移使得平移後圖形的頂點 Q 仍在直線 $y = 1 + 2x$ 上，且亦通過

點 $B(\frac{1}{2}, 0)$ ，此時 P, Q 為兩相異點，則 $\overline{PQ} = \frac{\textcircled{16-1} \sqrt{\textcircled{16-2}}}{\textcircled{16-3}}$ 。(化為最簡根式)

17. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 為直角， \overline{AB} 邊上一點 D ，滿足 $\angle BCD = 2\angle ACD$ ，且 $\overline{BC} = 2\overline{BD}$ 。

若 $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ ，則 $k = \frac{\textcircled{17-1}}{\textcircled{17-2} \textcircled{17-3}}$ 。(化為最簡分數)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。

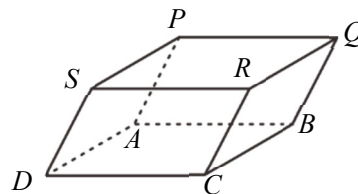
選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標空間中有一平行六面體 $PQRS-ABCD$ ，如圖所示。

已知 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-5, 5, 5)$ 、 $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP} = (-2, 0, -4)$ 、

$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (6, -10, -8)$ ， $|\overrightarrow{AP}| = 6$ 。試回答下列問題。



18. 試問平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？（單選題，3 分）

- (1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $6\sqrt{3}$ (5) $10\sqrt{2}$

19. 設 B 點坐標為 $(1, 2, 0)$ ，試求平面 $ABCD$ 的平面方程式。（非選擇題，4 分）

20. 試求平行六面體的體積，並求平行六面體上（含邊界）距點 A 的最長距離。（非選擇題，8 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$